Jürgen MAASZ, Linz

Realitätsnähere Modellierung im Mathematikunterricht

Die Bemühungen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts in den letzten Jahrzehnten haben - dank MUED, ISTRON und vieler engagierter LererInnen - dazu beigetragen, dass mehr realitätsbezogener Mathematikunterricht stattfindet. Das ist tatsächlich eine *Verbesserung*: Einerseits kann die Lösung realitätsnaher Fragen mit Hilfe von Mathematik die oft gestellte Frage „Wozu sollen wir Mathematik lernen?“ zufriedenstellend beantworten. Andererseits trägt solcher Mathematikunterricht dazu bei, mehr über Mathematik insgesamt zu wissen. Mathematik ist eine sehr umfassende Wissenschaft mit sehr vielen Aspekten. Wer sich auf *einen* Zugang zur Mathematik - das leider nur zu oft für die Schule typische Ausrechnen vorgegebener Aufgaben - konzentriert, vermittelt damit einen einseitigen und unvollständigen Blick auf die Mathematik und riskiert, ein mögliches Interesse an Mathematik zu vermindern oder zu verhindern, weil vielleicht ein anderer Zugang zur Mathematik, der gerade motivierend wäre, gar nicht vorkommt. Andere Wege zur Mathematik führen etwa über ihre Geschichte, ihre Struktur, ihre innere Logik, philosophische Fragen, Spielerisches und Knobeleien oder eben über ihren Bezug zur Realität und ihre tatsächliche Anwendung in Beruf und Alltag.

Im realitätsbezogenen Mathematikunterricht ist das Modellieren ein unentbehrlicher Bestandteil. Welche Kompetenzen dabei gefördert und gefordert werden, hängt selbstverständlich von der konkreten Unterrichtsgestaltung ab. Hier gibt es ein weites Spektrum, weil es sehr unterschiedliche Unterrichtsgestaltungen und Auffassungen von realitätsbezogenem Mathematikunterricht gibt. Zum Beschreiben des Modellierens werden in der Literatur häufig Grafiken zum Modellierungskreislauf verwendet, in denen es von der Realität zum Realmodell, zu Berechnungen, zu Interpretationen und zurück zur Realität geht - und von dort so oft wie nötig oder sinnvoll zu einem verbesserten Modell und einem neuen Kreislauf (am meisten zitiert werden Blum und Leiss 2007, weniger bekannt Maaß 1989)

Einige wichtige Fragen zur Modellierung bleiben im Unterricht aber in dieser Literatur oft unerwähnt, die für die tatsächliche Anwendung von Mathematik in der realen Welt zentral sind: Welcher Aspekt der realen, sozialen oder natürlichen Umwelt soll weshalb und mit welcher Zielsetzung optimiert werden? Wie wird „Realität“ erkannt und modelliert? Wer gibt den Auftrag, wer setzt die Ziele, wer entscheidet über die Akzeptanz von Ergebnissen? Werden ethische Konsequenzen der Veränderung der Realität aufgrund der erzielten Ergebnisse berücksichtigt? Wer trägt die Verantwortung für die Ergebnisse?

Wenn ich - unter anderem mit diesem Beitrag - dafür plädiere, den Realitätsbezug im Mathematikunterricht noch weiter als bisher auszubauen und jene philosophischen und soziologischen Fragen, die insbesondere am Beginn und am Ende eines Modellierungsprozesse unweigerlich auftauchen, auch im Unterricht selbst zu thematisieren, dann geht es mir darum, einen einmal eingeschlagenen Weg weiter voranzuschreiten und das Potenzial zur Verbesserung des Mathematikunterrichts durch noch mehr Realitätsbezug noch besser als bisher zu nutzen. Um es auch hier noch einmal zu betonen: Das strategische Ziel ist nicht, dass nur noch realitätsbezogen unterrichtet wird, sondern in jeder Schulklasse ab und zu - es geht um Vielfalt, nicht um Einseitigkeit. Die SchülerInnen sollen mehr über die verschiedenen Aspekte und Zugänge zur Mathematik erfahren!

Entscheidungen zu Projektbeginn

Auf jedem Fall muss vor dem Beginn von Berechnungen im Zuge einer Modellierung eines Aspektes der Realität entschieden werden, was erreicht werden soll. Auf dem Wege zu dem Ausrechnen, welches im üblichen Mathematikunterricht im Zentrum steht, müssen ganz viele wichtige Entscheidungen gefällt werden: Welcher Aspekt der Realität soll thematisiert werden? Mit welcher Absicht soll etwas modelliert werden? Soll z.B. Zeit, Geld, Material oder Energie gespart werden? Wer soll etwas davon haben, wenn die Modellierung erfolgreich ist? Konkret: Wenn eine Ampelsteuerung optimiert wird, wer soll Zeit sparen bzw. sicherer unterwegs sein: Die Autofahrer, die Radler, die Fußgänger? Manchmal ist das Optimum für die eine Gruppe nachteilig für eine andere Gruppe. Wenn die Ampeln an der Straße vor der Schule so geschaltet sind, dass der Durchgangsverkehr möglichst schnell und ohne Stau fahren kann, trägt das nicht notwendig zur Sicherheit der Schulkinder bei. Wenn an der Fußgängerampel vor der Schule sehr lange Grünphasen für die SchülerInnen geschaltet werden, gibt es längere Wartezeiten für Autos und vielleicht einen Stau. Kurz: Es gibt nicht „das Optimum“, sondern verschiedene für unterschiedliche Interessenten - und vielleicht einen guten Kompromiss.

Aus dem Alltag ist den meisten SchülerInnen solch eine Erfahrung durchaus bewusst; das Leben in sozialen Gemeinschaften wie Familien oder als Mitglied einer Jugendgruppe erfordert laufend Kompromisse. Mathematik ist aber für die meisten Menschen so strickt von der Realität getrennt, dass sie völlig objektiv erscheint und es ganz unerwartet ist, wenn an der entscheidenden Schnittstelle zur Realität der soziale Alltag, eine Struktur von Macht und Interesse sichtbar wird. Gehört das in den Mathematikunterricht? Selbstverständlich, es ist ein notwendiger Schritt auf dem Wege zur umfassenden Kompetenzentwicklung! Die übliche Beschränkung des Mathematikunterrichts auf das Ausrechnen von gestellten Aufgaben verhindert einen solchen Schritt zu mehr Kompetenz oder - mit anderen Worten - zur Erreichung allgemeiner Lehrziele, wie sie in den allgemeinen Teilen von Lehrplänen formuliert sind.

Die typische Struktur einer Mathematikaufgabe in Schule und Hochschule sieht etwa so aus: „Gegeben ist… Berechne…!“ Im Hinblick auf diese Struktur spielt es keine Rolle, ob die Länge von zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gegeben ist, aus denen dann die Länge der dritten Seite auszurechnen ist oder ob eine Menge mit einer gegebenen Verknüpfung darauf zu überprüfen ist, ob es sich hier um eine Gruppe handelt. Obwohl im Angesicht elektronischer Denkwerkzeuge immer mehr Zweifel daran geäußert werden, dass es sinnvoll ist, so viel Zeit wie bisher üblich mit dieser Art Übungsaufgabe zu verbringen, ist das nicht der Punkt, über den ich hier laut nachdenken möchte. Hinter dem „gegeben ist…“ verschwindet jede Sinnfrage, der Sinn dieser Art Aufgabe besteht im Üben, im Lernen für den nächsten Test und vielleicht im Verstehen des Algorithmus. Vielleicht? Üben allein reicht in der Regel nicht, um die dazugehörige Mathematik zu verstehen.

Verantwortung für Ergebnisse und Modellierungsfolgen

Wenn in einer Schulklasse die Entscheidung gefällt wurde, dass nach dem x-ten Durchlauf das gewünschte Ergebnis erreicht wurde oder es auch umgekehrt mit weiteren Durchläufen und unter Berücksichtigung beschränkter Möglichkeiten vermutlich nicht besser wird, selbst wenn noch einige Durchläufe stattfinden, steht ein Resultat im Raum. Im Hinblick auf die gewünschte Kompetenzentwicklung ist es sehr wichtig, den Entscheidungsprozess über das Ende, das Aufhören, in der Klasse zu üben und die tatsächliche Entscheidung auch durch die Klasse selbst fällen zu lassen. Auf dem Wege dorthin kann über Kriterien für solche Entscheidungen nachgedacht werden und insgesamt gelernt werden, wie rationale und demokratische Entscheidungen getroffen werden sollen.

Wenn zur Modellierung ein relevantes und interessantes Thema gewählt wurde, ist das Ergebnis von weit größerem Interesse als üblich. Das Ergebnis soll etwas über die Wirklichkeit aussagen, einen Beitrag dazu leisten, sie besser zu verstehen und im gewünschten Sinne zu verbessern. Wenn etwa überlegt werden sollte, wie viel Farbe zum Ausmalen des Klassenzimmers gebraucht wird und das Klassenzimmer tatsächlich neu ausgemalt wird, ist die Freude groß, wenn tatsächlich genau die passende Menge Farbe gekauft wird. Wenn für einen Elternabend selbst gebackener Kuchen und Erfrischungsgetränke bereitgestellt werden sollen, ist das Erfolgserlebnis vielleicht sogar noch nachhaltiger, wenn alles zur Zufriedenheit der Eltern gelungen ist. In solchen Fällen erleben die SchülerInnen etwas sehr Ungewohntes für typischen Mathematikunterricht. Ihr mathematisches Bemühen hat reale Konsequenzen, die über Lob oder Tadel und eine Note deutlich hinausgehen!

Was aber passiert, wenn das Modell nicht so gut funktioniert? Wenn die Eltern sich nach dem Elternabend darüber beschweren oder lustig machen, dass die Planung wohl nicht so gut war, weil schon bald kein Kuchen mehr vorhanden war? Objektiv ist das sicher nicht so schlimm, subjektiv kann das die SchülerInnen ganz schön treffen. Sehr schnell wird dann die Frage gestellt, wer denn in welcher Weise für das unzureichende Resultat verantwortlich ist. Wenn die Lehrkraft diese Frage bewusst über das Niveau von schnellen - und nutzlosen - Schuldzuweisungen hinaushebt, kann daraus einiges für weitere Modellierungen gelernt werden. Bisweilen ist die Suche nach dem tatsächlichen Fehler, den Ursachen für ein unbefriedigendes Modellierungsergebnis sehr schwer und lehrreich. Gab es irgendwo einen Rechenfehler? Das lässt sich in der Schule meist am einfachsten überprüfen; bei Projekten aus der Industriemathematik ist das oft viel aufwendiger. Wo lagen wir mit unseren Modellannahmen und Auswahlentscheidungen nicht gut? Haben wir im Beispiel den Hunger der Eltern völlig unterschätzt? Haben wir so gut schmeckende Kuchen gebacken, dass nicht nur einige aus Höflichkeit etwas probiert haben, sondern alle Anwesenden gern etwas mehr essen wollten? In dem Fall können wir lernen, dass ein gutes Angebot eine vorher nicht vorhandene Nachfrage schafft. Das erleben wir auch, wenn eine Umgehungsstraße um den Ort X gebaut wird, oder ein Sonderangebot im Schaufenster oder Internet angepriesen wird. Plötzlich fahren insgesamt mehr Autos auf der Straße, die am Ort X vorbeiführt und viele Menschen meinen, den als Sonderangebot angepriesenen Artikel zu brauchen. Welche eine Erfahrung ist das für den Mathematikunterricht, in dem es normalerweise wenn überhaupt nur eine exakte Lösung gibt. Wo kommt es im Mathematikunterricht außer im Themengebiet „Systemdynamik“ vor, dass die Lösung einer Aufgabe Rückwirkungen auf die Aufgabenstellung hat?

Literatur

Blum, W., Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Filling up”. In Haines et al. (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing

Maaß, J.: (1990) Mathematische Technologie = sozialverträgliche Technologie? Zur mathematischen Modellierung der gesellschaftlichen "Wirklichkeit" und ihren Folgen, in: R. Tschiedel (Hrsg.): Die technische Konstruktion der gesellschaftlichen Wirklichkeit, Profil-Verlag München.